Some remarks on linear product intraday hedge

DeltaPL 是做市中非常重要的 PL 组成部分，管理好 delta 风险的同时去实现更多的 deltaPL(或者减小做市逆向选择带来的 delta loss) 一直是期权期货做市非常重要的一部分。在这篇报告中，我们来分析日内线性产品对冲行为的一些性质。在报告中，线性产品的风险因子价格为 *Base*, 一般来说是标的价格或者是定价模型中的某个主要的行情方向性风险因子。

Intraday market making. 考虑期权期货做市的日内成交集合为 $\mathcal{T}^M = \{(q_i^M, p_i^M)\}$, 这里 q_i^M 代表第 i 笔做市成交的 delta 成交量, 即 $q_i^M = \text{tradeVolume} * \text{tradeDelta} * \text{tradeLongShort} * \text{contractMultiplier}$, p_i^M 代表第 i 笔做市成交的 Base 价格，这里为了简化模型，我们考虑 p_i^M 为第 i 笔做市成交的时刻的 Base 市场中间价格。在日内时刻 t, $0 \le t \le T$, 做市的 deltaPL 可以被记为,

$$\text{DeltaPL}^M[t] = \sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M * (p[t] - p_i^M). \tag{1}$$

在收盘时, 计算当日做市 deltaPL, intradayMMDeltaPL $= \sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M * (p_{close} - p_i^M)$, 这里 $p_{close} = p[T]$.

Linear base hedge. 考虑 Base 对冲的日内成交集合为 $\mathcal{T}^H = \{(q_i^H, p_i^H)\}$, 这里 q_i^H 代表第 i 笔对冲成交的 delta 成交量, p_i^H 代表第 i 笔对冲成交的 Base 价格。在日内时刻 t, $0 \le t \le T$, 对冲的 deltaPL 可以被记为,

$$\text{DeltaPL}^H[t] = \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * (p[t] - p_i^H). \tag{2}$$

在收盘时, 计算当日对冲 deltaPL, intradayHedgeDeltaPL $= \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * (p_{close} - p_i^H)$, 这里 $p_{close} = p[T]$. 主力对冲策略的目的是对冲做市合约的 delta 头寸，所以要求累计至收盘的做市 delta 头寸等于对冲的 delta 头寸,

$$0 = \sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H. \tag{3}$$

Gross deltaPosition and deltaPL. 我们加总做市成交的 deltaPL 和对冲的 deltaPL，计算 intradayNetDeltaPL,

$$\begin{aligned}
\text{DeltaPL}^{Net}[T] &= \text{DeltaPL}^M[T] + \text{DeltaPL}^H[T] \\
&= \sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M * (p_{close} - p_i^M) + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * (p_{close} - p_i^H) \\
&= p_{close}\left(\sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M\right) - \sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M * p_i^M + p_{close}\left(\sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H\right) - \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H \\
&= p_{close}\underbrace{\left(\sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H\right)}_{=0} - \left(\sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M * p_i^M + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H\right) \\
&= -\left(\sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M * p_i^M + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Optimization. 根据 Eq. 4, 我们考虑优化对冲决策，形成如下优化问题,

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathcal{T}^H} \underbrace{\left(\sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M * p_i^M + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H\right)}_{\text{negative deltaPL marked by mid-price}} + \underbrace{\gamma \sum_{\mathcal{T}^H} |q_i^H|}_{\text{trading cost},\gamma>0}, \\
&s.t. \quad 0 = \sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H.
\end{aligned} \tag{5}$$

上述优化问题的目标函数，或者损失函数，表示为 $J(\mathcal{T}^H)$，是在期望的定义下求最小值，对应的不确定性为 Base 价格（中间价）的路径。对于对冲任务，考虑一个特殊策略，在盘中不做任何最对冲，仅在收盘时对冲掉当时累计的所有做市 delta 头寸（实际操作中一次性对冲可能会有较大交易成本，可在收盘前最后十分钟分多笔下单），我们表示该策略为 $\mathcal{T}_*^H = \{(-\sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M,\ p_{close})\}$。下面，我们尝试证明，当标的未来趋势完全独立于过去，是不可预测的，对于任意 $t_2 > t_1$, $\mathcal{F}[t_1]$ 为截止到 t_1 的 filtration, 那么有 $(p[t_2] - p[t_1]) \perp \mathcal{F}[t_1]$，所以对冲决策是 zero-intelligence 的，那么收盘对冲是最优的策略。

Proposition 1. *如果 Base 对冲决策是 zero-intelligence 的，价格路径和做市头寸累计路径独立，Base 价格过程满足 martingale，那么收盘对冲是最优策略。*

Proof. 我们表示做市累计至收盘的总 delta 头寸为 $A = \sum_{\mathcal{T}^M} q_i^M$，做市累计至收盘的总 delta 成本为 $B = \sum_{\mathcal{T}^M} p_i^M q_i^M$，由于对冲的头寸不影响做市的头寸 (no delta elastic)，A 和 B 是常数，我们把 Eq. 5中的目标函数写为 $J(\mathcal{T}^H) = B + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H + \gamma \sum_{\mathcal{T}^H} |q_i^H|$，$s.t.\ 0 = A + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H$. 我们标记第 i 笔对冲策略成交对应的发生时间为 t_i, $0 \leq t_i \leq T$, 该时刻产生的对冲决策一定是 *adapt* 到 filtration $\mathcal{F}[t_i]$ 中的，$\mathcal{F}[t_i]$ 包含了所有的价格信息和成交信息等。

对于收盘对冲策略 $\mathcal{T}_*^H$, 计算目标函数，

$$J(\mathcal{T}_*^H) = B + (-A) * p_{close} + \gamma |A|.$$

对于任意一种对冲策略，$\mathcal{T}^H$，我们比较两种策略（$\mathcal{T}^H$ vs. $\mathcal{T}_*^H$），

$$\begin{aligned} J(\mathcal{T}^H) - J(\mathcal{T}_*^H) &= B + \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H + \gamma \sum_{\mathcal{T}^H} |q_i^H| - B + A * p_{close} - \gamma |A| \\ &= \underbrace{\left(\sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H + A * p_{close} \right)}_{\text{part.1}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{\mathcal{T}^H} |q_i^H| - |A| \right)}_{\text{part.2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

这里 part.2 一定是非负的，代入 $|A| = |\sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H|$,

$$\sum_{\mathcal{T}^H} |q_i^H| - |\sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H| \geq 0.$$

由于策略 $\mathcal{T}^H$ 一定满足 Eq. 3的约束，我们代入 $A = -\sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H$，part.1 可以被写成

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H + A * p_{close} &= \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * p_i^H - p_{close} * \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H \\ &= \sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * (p_i^H - p_{close}). \end{aligned} \tag{7}$$

由于未来标的价格是不可预测的，对于任意时间 t_i, 有 $(p_{close} - p_i^H) \perp \mathcal{F}[t_i]$。$q_i^H$（$t_i$ 时刻的对冲决策，依赖于 $\mathcal{F}[t_i]$）和 $(p_{close} - p_i^H)$ 是独立的，策略 $\mathcal{T}^H$ 是 zero-intelligence。在 $p[t]$ 满足 martingale 的假设下，$\sum_{\mathcal{T}^H} q_i^H * (p_i^H - p_{close})$ 的期望为 0，所以，

$$J(\mathcal{T}^H) - J(\mathcal{T}_*^H) \geq 0.$$

□

收盘对冲策略几乎不产生对冲损益 (Eq. 2，有 $p_i^H = p_{close}$)，该对冲策略是在 realize 做市的 deltaPL。

Remark 1. *Prop. 1中的结论似乎和一般直觉有些冲突，如果 Prop. 1成立的话，是不是不存在更加有效用的对冲策略了，在这个段落中我们通过一个简单的例子详细阐述一下两者之间具体的逻辑关系。考虑对冲交易触发规则，当市场价格优于平均持有成本价格至少 1 元时进行对冲交易，有如下情景：*

1. *在 t_0 时刻收到一笔做市成交回报，*`BUY@100`*元，计入做多持有成本价，*`avg=100`*元；*
2. *在 t_1 时刻 Base 市场价格第一次超过 101 元，触发对冲交易，*`SHORT@101`*元，平仓；*
3. *当日截止收盘 T 再无任何交易，收盘价为 95 元。*

计算上述情景的损益，netPL = 1 元，mmPL = -5 元，hedgePL = 6 元。首先，我们注意到无论收盘价格是多少，损益都是 1 元，这是因为对冲交易平仓了做市头寸，PL is realized。假如在 t_1 时刻后，价格是未知的不可预测，但满足 martingale，那么我们知道收盘的期望价格依然是 101 元，对冲交易的期望是 0 元，这和 Prop. 1中的证明是一致的。

那么对冲策略是如何控制 PL 的？这主要是因为触发对冲交易的条件代表了 Base 价格路径的一个限制，触发对冲交易条件的价格路径样本空间为 $\Omega_{active} = \{sup\ p[\tau] \geq 101 : t_0 < \tau \leq T\}$。考虑全样本空间 $\Omega = \Omega_{active} + \Omega_{nohedge}$，显然 $\Omega_{nohedge} = \{sup\ p[\tau] < 101 : t_0 < \tau \leq T\}$。我们可以计算分别两个路径空间下的期望 PL， *1.* Ω*:* 做市成交的 *PL* 期望为 0, 满足 $0 = \mathrm{E}[PL|\Omega_{active}] * \mathrm{P}(\Omega_{active}) + \mathrm{E}[PL|\Omega_{nohedge}] * \mathrm{P}(\Omega_{nohedge})$*;*

2. Ω_{active}：做市成交的 *PL* 期望 $\mathrm{E}[PL|\Omega_{active}] = 1$，$\mathrm{P}(\Omega_{active}) = 2(1 - \Phi(1/\sqrt{T - t_0}))$[1]*;*

3. $\Omega_{nohedge}$：做市成交的 *PL* 期望为 $\mathrm{E}[PL|\Omega_{nohedge}] = -\mathrm{P}(\Omega_{active})/\mathrm{P}(\Omega_{nohedge})$，$\mathrm{P}(\Omega_{nohedge}) = 1 - \mathrm{P}(\Omega_{active})$*;*

在对冲交易的控制下，考虑 Ω_{active} 空间，我们可以控制做市损益的期望是 *1*，方差是 *0*，即锁住 *PL*。通过这个简单的数据案例，我们发现该 *Base* 对冲策略依然是 *zero-intellegence* 的策略（不对 *Base* 价格趋势做任何判断），该对冲策略不会对期望 *PL* 有任何提升 *(Prop. 1*成立*)*，但是该策略可以通过对冲控制锁住做市 *PL*，降低 *PL* 的方差。

Remark 2.

- **做市头寸和价格路径的相关性假设：** 做市的 delta 头寸一般是被逆向选择的结果 (包括局部趋势，如 10 分钟，或日内长期趋势，如 3 小时)，如果价格的日内路径会呈现动量延续的特点（假设存在某日内动量策略指数获得正收益)，做市的累计 delta 头寸或者持仓成本（生产主力对冲系统）是对未来具有预测意义的信息 (并非 zero-intelligence model)。

- **损益的方差控制：** 在这篇报告中未考虑到 DeltaPL 的稳定性，可以考虑在目标函数中加入 DeltaPL 的方差，那么取决于多目标偏好的权重，最优解可能会为了 compromise 损益的波动去提供一个 suboptimal 的期望损益。考虑一个理想情景，如无交易成本，价格可以在任意时间成交，那么在每一笔做市成交后同时成交一笔反方向的对冲交易，最后获得均值和方差均为零的 DeltaPL。在 Remark. 1中，我们也通过具体的计算案例说明了生产主力对冲的方差控制效用。

- **价格完全不可预测假设：** 价格完全不可预测这个具体指的是未来的价格行为和过去完全无关（过去的世界上的所有信息)，如布朗运动，这是不合理的。简单地说，如果该统计假设是成立的，那么在市场中就不应该存在任何策略可以获得稳定的正收益，同时也不应该有策略会稳定亏钱，所有交易者的损益期望都是零。在实盘观察中，实际上，在固定的时间观察尺度下，价格的行为多数会分为均值回复过程（如 AR(p) 或 OU-process）或者趋势过程（如 random walk with drift)。假设，日内价格服从均值回复过程，且做市头寸和价格路径有显著负相关关系（做市被动成交逆向选择现象)，那么，累计做市头寸风险触发 maxDelta 对冲的行为就会稳定的低卖高买，在对冲交易上形成稳定亏损的结果。

[1] 假设 $p[\tau]$ 服从布朗运动，那么 $\{\sup\, p[\tau] < 101 : t_0 < \tau \le T,\ p[t_0] = 100\}$ 等效于 $\{\sup\, B_t > 1 : 0 < t < T - t_0\}$, B_t 是标准布朗运动。我们计算 $P(\sup\, B_t > 1) = P(B_{T-t_0} > 1) + P(B_{T-t_0} \le 1, \sup\, B_t > 1)$, 由于布朗运动的反射特点，布朗运动一定存在某点首次触及 barrier = 1，记 first hitting time 为 T_x，由于 T_x 之后的状态与之前的状态无关，我们对 T_x 之后的轨迹关于 barrier = 1 进行一个反射，两个路径集合是完全一致的，$\{B_{T-t_0} \le 1, \sup\, B_t > 1\} = \{B_{T-t_0} > 1\}$, 我们有 $P(B_{T-t_0} \le 1, \sup\, B_t > 1) = P(B_{T-t_0} > 1)$。因此，$P(\sup\, B_t > 1) = 2P(B_{T-t_0} > 1) = 2(1 - \Phi(1/\sqrt{T - t_0}))$.